ВЕСЦІ НАЦЫЯНАЛЬНАЙ АКАДЭМІІ НАВУК БЕЛАРУСІ № 1 2014
СЕРЫЯ ФІЗІКА-МАТЭМАТЫЧНЫХ НАВУК

УДК 514.142

А. В. ПРОКОПЧУК, В. И. ЯНЧЕВСКИЙ

О НЕЦИКЛИЧЕСКИХ УНИТАРНЫХ ИНВОЛЮЦИЯХ ГЕНЗЕЛЕВЫХ ДИСКРЕТНО НОРМИРОВАННЫХ АЛГЕБР С ДЕЛЕНИЕМ

Институт математики НАН Беларуси

(*Поступила в редакцию 27.12.2013*)

В этой статье нас будут интересовать унитарные инволюции конечномерных центральных алгебр с делением. Напомним вначале необходимые определения.

О п р е д е л е н и е 1. Пусть $\mathcal{D}$ – конечномерная центральная алгебра с делением над полем K. Для квадратичного сепарабельного расширения полей K/k инволютивный антиавтоморфизм алгебры $\mathcal{D}$ называется унитарной K/k-инволюцией, если его ограничение на K – нетривиальный автоморфизм с полем инвариантов k.

Среди унитарных инволюций с точки зрения изучения внешних анизотропных форм алгебраических групп типа A_n (см, напр., [3]) важную роль играют так называемые циклические.

О п р е д е л е н и е 2. K/k-инволюция τ алгебры $\mathcal{D}$ называется циклической, если существует циклическое расширение χ/k, линейно разделенное над k с полем K такое, что композит χK – максимальное подполе алгебры $\mathcal{D}$.

Описание циклических K/k-инволюций для произвольных полей k является малореальной задачей, поэтому при исследовании проблемы цикличности инволюций обычно ограничиваются рассмотрением важных для приложений специальных классов расширений K/k. Среди первоначальных результатов о цикличности инволюций, которые получены к настоящему времени, отметим следующие ([1, 2]), связанные с различными условиями на поле k и алгебру $\mathcal{D}$ (которая не обязательно алгебра с делением):

(i) k – конечное поле и степень алгебры $\mathcal{D}$ нечетна;

(ii) поле k обладает свойством, что всякая квадратичная k-форма от 8 переменных изотропна, степень алгебры $\mathcal{D}$ равна 3 и k содержит примитивный корень степени 3, если $\operatorname{char} k \neq 3$;

(iii) k – глобальное поле и алгебра $\mathcal{D}$ нечетной степени расщеплена;

(iv) k – локальное недиадическое поле и степень алгебры $\mathcal{D}$ нечетна;

(v) k – поле алгебраических чисел.

До сих пор до конца не рассмотрена ситуация гензелевых полей k, что является предметом рассмотрения настоящей статьи в случае, когда группа значений нормирования поля k дискретна (т. е. изоморфна $\mathbb{Z}$).

Пусть v_k – гензелево дискретное нормирование поля k, а v_K и $v_{\mathcal{D}}$ – их однозначные продолжения соответственно на поле K и алгебру $\mathcal{D}$ с группами значений Γ_K и $\Gamma_{\mathcal{D}}$. Пусть $V_{\mathcal{D}}$, $M_{\mathcal{D}}$ и $\overline{\mathcal{D}} = V_{\mathcal{D}}/M_{\mathcal{D}}$ – соответственно кольцо, идеал и алгебра вычетов нормирования $V_{\mathcal{D}}$.

Проблема существования циклических унитарных инволюций в центральных гензелевых алгебрах с делением решается различно в зависимости от того, является ли рассматриваемая алгебра неразветвленной или нет. В случае неразветвленных алгебр имеется простая редукция этой проблемы к аналогичной задаче, связанной с алгебрами вычетов рассматриваемых алгебр. Напомним определение неразветвленных над K алгебр $\mathcal{D}$.

О п р е д е л е н и е 3. Алгебра $\mathcal{D}$ называется неразветвленной над K, если $[\overline{\mathcal{D}}:\overline{K}]=[\mathcal{D}:K]$ и $Z(\overline{\mathcal{D}})/\overline{K}$ – сепарабельное расширение полей (здесь $Z(\overline{\mathcal{D}})$ – центр алгебры $\overline{\mathcal{D}}$) и разветвленной в противном случае.

В случае неразветвленных над K алгебр $\mathcal{D}$ имеет место следующая теорема редукции.

Т е о р е м а 1. *Пусть $\mathcal{D}$ – неразветвленная над K алгебра с делением и унитарной K/k-инволюцией. Тогда $\mathcal{D}$ обладает циклической K/k-инволюций тогда и только тогда, когда в $\overline{\mathcal{D}}$ существует циклическое расширение $\mathcal{E}/\overline{k}$, линейно разделенное с $\overline{K}/\overline{k}$, и такое, что $\mathcal{E}\overline{K}$ – подполе в $\overline{\mathcal{D}}$.*

Для алгебр $\mathcal{D}$ с ветвлением над K мы описываем важное необходимое условие для существования циклических инволюций в случае слабо разветвленных алгебр $\mathcal{D}$.

О п р е д е л е н и е 4. Алгебра $\mathcal{D}$ слабо разветвлена над K, если порядок группы $\Gamma_{\mathcal{D}}/\Gamma_K$ взаимно просто с характеристикой поля $\overline{K}$.

Для таких таких алгебр имеет место следующая

Т е о р е м а 2. *Пусть k – гензелево поле, $\mathcal{D}/K$ – центральная алгебра с делением нечетного индекса с K/k-инволюцией, где K/k – неразветвленное квадратичное расширение. Если $\mathcal{D}$ обладает циклической K/k-инволюцией, то примитивный корень степени p лежит в $\overline{k}$ для любого простого делителя p индекса $\mathcal{D}$.*

З а м е ч а н и е. Заметим, что в случае ветвящихся алгебр нечетного индекса расширение K/k всегда не разветвлено.

Из последней теоремы немедленно вытекает основное утверждение, описывающее нециклические K/k-инволюции в слабо разветвленных алгебрах нечетных индексов.

С л е д с т в и е. В обозначениях последней теоремы все K/k-инволюции алгебры $\mathcal{D}$ нециклические при условии отсутствия примитивного корня из единицы степени p хотя бы для одного простого делителя p индекса $\mathcal{D}$.

Кроме того, при доказательстве теоремы 2 будет использовано следующее свойство центров $\overline{\mathcal{D}}$.

П р е д л о ж е н и е. *Пусть $\mathcal{D}/k$, как и выше, – алгебра нечетного индекса, с K/k-инволюцией и K/k неразветвлено. Тогда группа Галуа центра $\overline{\mathcal{D}}$ над $\overline{k}$ является группой диэдра.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Обозначим через $Z(\overline{\mathcal{D}})$ центр $\overline{\mathcal{D}}$. Тогда для алгебры инерции I алгебры $\mathcal{D}$ ввиду леммы 3.17 [3] существует K/k-инволюция τ алгебры $\mathcal{D}$ и простой элемент Π кольца $V_{\mathcal{D}}$ такие, что, $I^{\tau}=I$, $I^{i_{\Pi}}=I$ и $\Pi^{\tau}=\Pi$ (здесь i_{Π} – внутренний автоморфизм, индуцируемый элементом Π). Из последнего немедленно следует, что ограничения τ и τi_{Π} над I являются инволюциями этой алгебры с одинаковым действием на поле K. Тогда их редукции – инволюции $\overline{\mathcal{D}}$ с одинаковым действием на $\overline{K}$. Расширение $Z(\overline{\mathcal{D}}/\overline{k})$ является расширением Галуа с образующими $\overline{\tau}|_{Z(\overline{\mathcal{D}})}$ и $\overline{\tau i_{\Pi}}|_{Z(\overline{\mathcal{D}})}$ (заметим, что их композиция совпадает с редукцией автоморфизма $\overline{i_{\Pi}}$, который, в свою очередь, является образующей группы Галуа $Z(\overline{\mathcal{D}}/\overline{K})$, см. [4]). Откуда уже легко усмотреть, что группа Галуа $Z(\overline{\mathcal{D}})$ над $\overline{k}$ является группой диэдра.

Д о к а з а т е л ь с т в о теоремы 2. Нетрудно видеть, что достаточно доказать теорему в случае алгебр $\mathcal{D}$ примарных индексов. Пусть $\mathrm{ind}\mathcal{D}=p^n$ для простого p.

τ – циклическая K/k-инволюция такая, что χ/k – τ-инвариантное циклическое расширение со свойством: $\chi K/K$ – максимальное подполе в $\mathcal{D}$.

Рассмотрим два случая:

(i) χ/k – расширение с ветвлением;

(ii) χ – неразветвленное расширение k.

В случае (i) χ/k разлагается в башню $k\subseteq\chi_n\subseteq\chi$, где χ_n – максимальное неразветвленное подрасширение k в χ. Ввиду наших преположений об индексе алгебры $\mathcal{D}$ и характеристики $\overline{k}$, расширение χ/χ_n – слабо вполне разветвлено степени, скажем, $p^s, s>0$, и, следовательно, куммерово (т. е. $\chi=\chi_n(\sqrt[p^s]{\pi})$, где π – простой элемент кольца целых поля χ_n). Поскольку χ/χ_n циклично, примитивный корень степени p^s из единицы обязан принадлежать полю χ_n. Тогда полю χ_n должен принадлежать корень ε_p p-й степени из единицы. Заметим, что это так в том и только в том случае, когда $\varepsilon_p \in k$. Действительно, $k \subseteq k(\varepsilon_p) \subseteq \chi_n$, и так как степень $[k(\varepsilon_p):k]$ делит $p-1$ и одновременно делит p^s, то $k(\varepsilon_p) = k$. Ввиду нашего предположения о взаимной простоте p и характеристики поля вычетов $\overline{k}$ поля k, $\varepsilon_p \in k$ тогда и только тогда, когда его вычет принадлежит полю $\overline{k}$. Таким образом, отсутствие примитивного корня p-й степени в $\overline{k}$ противоречит цикличности τ.

В случае (ii) в алгебре $\mathcal{D}$ имеется подалгебра инерции I такая, что $\mathcal{D} \supseteq I \supseteq \chi \supseteq k$. Так как $\mathrm{Gal}(Z(\overline{\mathcal{D}})/\overline{k})$ – группа диэдра, ввиду $\overline{\mathcal{D}} = \overline{I}$ $\mathrm{Gal}(Z(\overline{I})/\overline{k})$ – группа диэдра. Значит, $\mathrm{Gal}(Z(I)/k) \cong \mathrm{Gal}(Z(\overline{\mathcal{D}})/\overline{k})$, здесь $Z(\overline{\mathcal{D}})$, $Z(\overline{I})$ – центр $\mathcal{D}$ и I соответственно.

С другой стороны, $Z(I) \subseteq \chi K$, так как любой элемент из χ или K перестановочен с элементами $Z(I)$. Следовательно, $k \subseteq Z(I) \subseteq \chi K$. Группа $\mathrm{Gal}(\chi K/k)$ абелева, поскольку расширения χ/k и K/k линейно разделены и цикличны. Следовательно, $\mathrm{Gal}(Z(I)/k) \cong \mathrm{Gal}(\chi K/k)/\mathrm{Gal}(\chi K/Z(I))$, и потому $\mathrm{Gal}(Z(I)/k)$ – абелева, что противоречит тому, что $\mathrm{Gal}(Z(I)/k)$ – группа диэдра (которая некоммутативна).

Литература

1. *Прокопчук А. В., Тихонов С. В., Янчевский В. И.* // Весці НАН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. 2013. № 1. С. 36–40.
2. *Янчевский В. И.* // Докл. НАН Беларуси. 2013. Т. 57, № 2. С. 32–37.
3. *Платонов В. П., Рапинчук А. С.* Алгебраические группы и теория чисел. М., 1991.
4. *Jacob B., Wadsworth A.* // J. Algebra. 1990. Vol. 128. P. 126–179.

A. V. PROKOPCHUK, V. I. YANCHEVSKII

NON-CYCLIC UNITARY INVOLUTIONS OF HENSELIAN DISCRETELY VALUED DIVISION ALGEBRAS

Summary

Let $\mathcal{D}/K$ be a Henselian discrete valued tamely ramified central division K-algebra of odd degree. The following necessary condition for existence of the cyclic unitary K/k-involution of $\mathcal{D}$ (K/k is a separable extension of degree 2) is proved: the primitive root of unity of p^{th} degree for any prime divisor of index $\mathcal{D}$ lies in the residue field $\overline{k}$ of k. The description of the wide class of non-cyclic involutions of above algebras follows immidiately from the above condition.